概率统计与函数交汇视角下的最值问题求解策略

陈思羽 蒋业阳

江西科技师范大学 330038

【摘要】：在新高考改革的背景下，高考试题的设计日益强调学科知识的创新性和应用性，同时更加注重考查学生对知识的综合运用能力。概率统计作为常考知识点，与其他知识的综合考察，不仅符合高考命题的趋势，同时题目具有一定的难度，思维性较强，也是新课标核心素养下的趋势。基于此，本文聚焦于概率统计中的最值问题，探讨导数在这一领域的创新应用，并对概率统计中的最值问题进行科学分类，结合典型例题，详细阐述如何运用微分学方法进行高效求解。具体而言，针对不同类型的最值问题，分别构建相应的数学模型，并利用导数求极值、判断函数单调性等方法，寻求最优解；并给出一些备考策略与技巧以供读者学习。

关键词：数学模型；导数应用；最值问题；求解策略

1 常见类型与解题思路

1.1 相关概念的最值问题

在概率统计中，数学期望与方差、概率分布以及概率密度函数的最值问题是一类常考题型。在实际操作中，此类问题通常会给出一个关于随机变量 X 的表达式，其中包含一个变量参数 p，要求通过找到 p 的最优值，使得所求变量达到最大或最小。此类问题的求解需综合运用概率统计理论与极值分析工具，具体表现为通过导数研究目标函数的单调性与临界点特性。

例 1（2021 年全国新高考 II 卷 21）

假设开始时有一个微生物个体（称为第 0 代），该个体繁殖的若干个个体，形成第 1 代，第 1 代的每个个体繁殖的若干个个体，形成第 2 代，…….假设每个个体繁殖的个体数相互独立且分布列相同，记第 1 代微生物的个体总数为 X，X 的分布列为 $P(X=i)=p_i>0$，$i=0,1,2,3.$

(2) 以 p 表示这种微生物最终消亡的概率.已知 p 是关于 x 的方程 $p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$ 的最小正根.证明：当 $E(X)\le 1$ 时，$p=1$；当 $E(X)>1$ 时，$p<1$.

分析 这是一道典型的概率统计当中求解期望最值的题目，主要考察了数学期望的计算、导数的应用以及最优化问题的求解技巧，解答此题需结合导数与最优化方法。首先我们需要写出 $E(X)$ 关于 p 的表达式，再对表达式求导，根据函数单调性判断出函数极值的性质。

解答 由题意知

$E(X)=0p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3=p_1+2p_2+3p_3$。

设 $f(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3-x$，则 $f(p)=0$，$f(0)=p_0>0$，$f(1)=p_0+p_1+p_2+p_3-1=0$，$f'(x)=p_1+2p_2x+3p_3x^2-1$.方程 $f'(x)=0$ 的判别式 $\Delta=4p_2^2-4\times 3p_3\times(p_1-1)>0$，不妨设其两根分别为 α,β，且 $\alpha<\beta$，则由韦达定理可知 $\alpha+\beta=-\frac{2p_2}{3p_3}<0$，$\alpha\beta=\frac{p_1-1}{3p_3}<0$，则 $\alpha<0<\beta$，又 $p>0$，所以 $\alpha<p$，且 $f'(1)=p_1+2p_2+3p_3-1=E(X)-1$.

所以当 $E(X)\le 1$ 时，$f'(1)=E(X)-1\le 0$，即 $\alpha<0<1\le\beta$，又 $f(1)=0$，故 $f(x)=0$ 的最小正实根为 1，此时 $p=1$.当 $E(X)>1$ 时，$f'(1)=E(X)-1>0$，即 $\alpha<0<\beta<1$，即存在一个 $x_0\in(0,\beta)$ 使得 $f(x_0)=0$，此时 $x_0=p<1$.

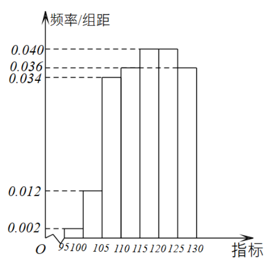
1.2 综合问题

前文所述的单变量参数优化与利润期望最值问题，本质上是基于单一目标函数的局部优化；而实际应用中往往存在多变量交互、约束条件复杂的情形，这类综合问题的解决需要突破传统模型的边界，将概率统计的随机性分析与函数动态建模深度结合。其难点不仅在于数学工具的跨学科融合（如概率分布与导

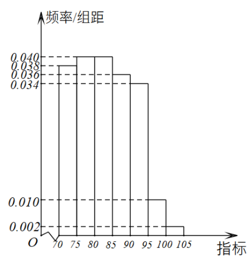
数的协同应用），更在于对现实问题的多维度抽象能力——需通过构建分层数学模型（如分段函数、复合概率分布等），量化随机性与确定性变量的交互影响。例如下题通过动态临界值的设定，将医学诊断的漏诊率与误诊率纳入统一函数框架，体现了复杂系统优化中建模精度与计算效率的平衡要求。。

例 2 （2023 年全国新高考 II 卷 19）

某研究小组经过研究发现，某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异．经过大量调查，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图：



患病者



未患病者

利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 c ，将该指标大于 c 的人判定为阳性，小于或等于 c 的人判定为阴性．此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率，记为 $p(c)$ ；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为 $q(c)$ ．假设数据在组内均匀分布，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率．

设函数 $f(c)=p(c)+q(c)$ ，当 $c\in[95,105]$ 时，求 $f(c)$ 的解析式，并求 $f(c)$ 在区间 $[95,105]$ 的最小值．

分析 部分学生在图像信息提取环节就存在认知障碍，对此我们可以通过梳理题干信息，绘制表格（如表 2 所示）：

	阳性 $(>c)$	阴性 $(\le c)$
患病者		漏诊
未患病者	误诊	

表 2 题干信息表

再通过观察横纵坐标，利用特殊思想来辅助理解：分情况结 $c\in[95,100]$ false 和 $c\in(100,105]$ false 合坐标图来讨论。问题以实际问题为背景，要求考生将现实问题转化为数学模型，据题意，确定分段点 100，即可得出 $f(c)$ false 的解析式，再求解分段函数的最值．

解答 由分析中图可知：当 c 在区间 [95,100] 时，

f(c)=p(c)+q(c)=(c-95)x0.002+(100-c)x0.01+5x0.002

=-0.008c+0.82

当 c 在区间 [100,105] 时，

f(c)=p(c)+q(c)=5x0.002+(c-100)x0.01+(c-95)x0.002

=0.01c-0.98

所以由分段函数的性质可知，f(c) 在区间 [95,105] 的最小值为 0.02.

2. 备考策略与技巧

2.1 理解理论概念，构建一个完整的知识体系

概率统计与函数作为数学的重要分支，其理论概念的理解和知识体系的构建对于解决实际问题至关重要，学生可以在学习过程中通过绘制概率统计与函数交汇知识点的思维导图（如随机变量期望与导数极值的关联），构建概率分布函数与导数极值理论的映射关系，例如：通过随机变量期望的解析式与目标函数的导数建立关联”。

同时，新课程改革强调要培养学生的核心素养，不仅要理解知识的“内涵”，更要注重“外延”，要关注知识的内在联系与实际的应用。我们在学习的过程当中，要注重知识点之间的衔接，构建一个完整的概率知识系统，将概率分布、随机变量、函数性质等核心概念有机串联，形成系统化的认知网络，最终实现知识迁移与创新应用，提升数学素养和解决实际问题的能力。

2.2 掌握并灵活运用常用的解题方法与技巧

掌握并灵活运用解题方法需结合问题特征：当目标函数为显式表达式时，优先代数法求极值；当涉及隐式概率分布（如例 1 的生成函数方程）时，需通过导数分析函数性态。例如，在例 2 的医学检测问题中，通过分段函数建模和导数验证连续性，体现了方法选择的综合性与严谨性。首先，要熟练掌握基本方法，如概率统计中的分布计算、期望方差求解，以及函数中的求导、极值分析等；其次，基于问题特征（如目标函数的可导性、约束条件的存在性）选择优化工具，例如：当约束条件为线性不等式时，优先拉格朗日乘数法；当变量独立时，利用导数求极值。例如在利润最值问题中，若目标函数为二次型，优先配方法；若为复杂函数（例 1），则需结合导数分析单调性，可结合表 3 选择合适的方式，对目标函数求取最值。通过大量练习和反思，不断优化解题思路，提升分析问题和解决问题的能力，从而在面对多样化的问题时能够高效准确地找到解决方案，快速解决复杂问题。

2.3 加强并针对性练习，提高解题能力

方法	适用场景
图像法	目标函数为低维且易于绘制的函数（如：线性或分段函数）
代数法	目标函数为线性或简单多项式函数（如：二次函数）

续表 3

方法	适用场景
不等式法	目标函数可利用均值不等式、柯西不等式等放缩求解
导数法	目标函数为连续可导的非线性函数或复合函数

表 3 方法选择表

练习是提高解题能力的有效途径。首先，要根据自身的学习情况，明确薄弱环节，有针对性的进行专项训练，例如分阶段练习，第一阶段聚焦基础题（如单一变量优化），第二阶段强化综合题（如医学检测临界值问题），第三阶段模拟高考真题（如 2023 年新高考Ⅱ卷 19 题）；其次，选择典型例题和综合性题目，通过反复练习加深对知识点的理解，并总结解题思路和技巧；此外，注重错题分析，找出错误原因并及时纠正，避免重复犯错。在练习过程中，逐步提高解题速度和准确率。通过系统化的知识积累和分阶段的练习，在培养解决实际问题的能力的同时，最终实现从量变到质变的提升，在面对复杂问题时能够从容应对，游刃有余。

3. 结束语

在本文中，我们从概率统计与函数交汇的视角探讨了最值问题的求解策略，通过对不同类型的真题分析，揭示了在解决概率统计中的复杂最值问题时，与函数相结合，不仅能够拓展最值问题的求解思路，还能为实际应用提供更为灵活和精确的解决方案。未来可探索概率密度函数与高阶导数（如凹凸性）的关联，进一步揭示统计分布极值的深层规律，建议教师在教学设计中增加跨学科案例（如金融风险模型中的概率 - 函数优化），强化学生建模能力。未来研究可聚焦于概率统计与函数理论在其他领域的深度融合，如机器学习中的损失函数优化、生物统计学中的动态模型构建等，以应对更为复杂和多样化的现实问题。通过本文对概率统计 - 函数交汇问题的分类解析与策略总结，我们不仅为高考备考提供了方法论支持，也为实际场景中的复杂优化问题（如资源分配、风险控制）奠定了理论应用基础，希望本文的研究能为实践应用提供有益的参考和启示。

参考文献

[1] 周晓霞 . 概率统计与函数的交汇 [J]. 中学数学，2023(3):49-50.

[2] 黄嵩涛 . 高考概率统计命题规律及考向预测 [J]. 广东教育（高中版），2024(3):20-26.

[3] 孙建国 . 聚焦概率统计与其他知识的交汇 [J]. 中学生数理化，2024(5):26-33.

[4] 郭建华，刘权华，于道洋，等 . 立足高考评价体系强化数学应用意识——以 2020-2023 年四年新高考Ⅰ卷概率与统计试题统计与分析为例 [J]. 数学通报 ,2024,63(04):43-50.

[5] 朱建生 . 新课程改革背景下的高中数学概率统计教学方法研究 [J]. 教师教育论坛 ,2022,35(10):55-57.

作者简介：陈思羽（2001-），女，汉族，江西南昌，学士，研究方向：中小学数学教育。